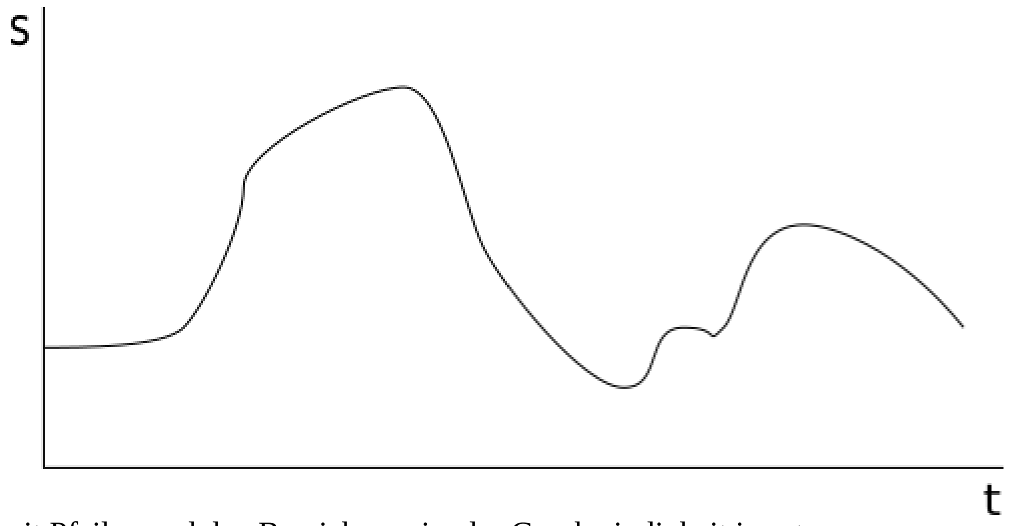
Grundlagen der Mechanik-Bewegung und Kraft

Verständnisfragen

1. Erklären Sie den Unterschied zwischen Momentangeschwindigkeit und mittlerer Geschwindigkeit.

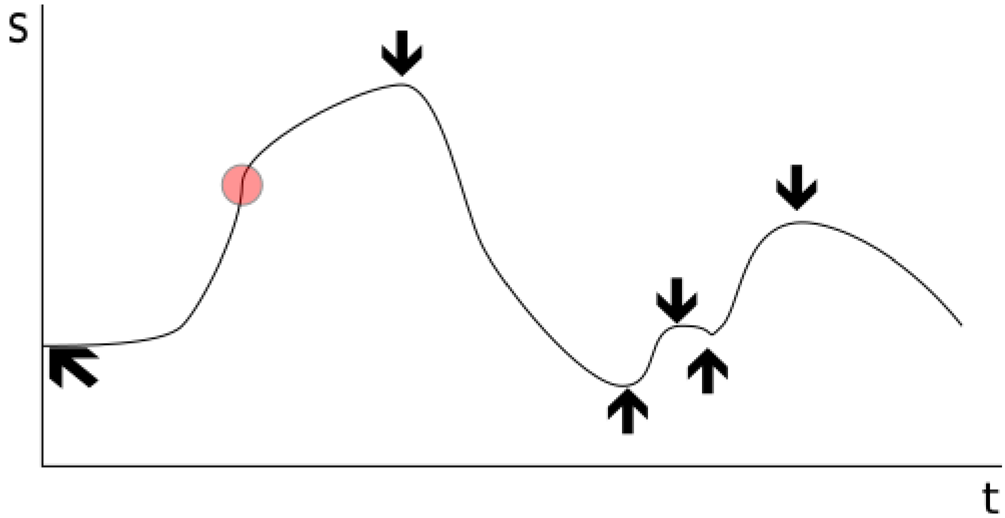
   Lösung:Die Momentangeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit eines Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt t. Die mittlere Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit welche aus einem gemessenen zurückgelegten Weg innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls oder aus einer gemessenen Zeitdifferenz für einen bestimmten zurückgelegten Weg bestimmt werden kann.

2. Markieren Sie in folgendem s-t-Diagramm Bereiche in denen die Geschwindigkeit null ist

   mit Pfeilen und den Bereich maximaler Geschwindigkeit in rot.

   Lösung:



3. Ein Schlitten fährt einen Berg hinab und kommt auf dem waagerechten Bereich darunter zum stehen. Welche Kräfte sind für das Abbremsen des Schlittens verantwortlich?

   Lösung: Gleitreibung, Luftwiderstand

4. Ein Pferd soll einen beladenen Karren ziehen. Das Pferd hat aber keine Lust und beruft sich darum auf das dritte Newtonsche Axiom: „Ich kann den Karren ja gar nicht ziehen, denn egal wie groß die Kraft ist, die ich auf den Karren ausübe, der Karren wird immer eine genauso große Kraft auf mich ausüben. Wie soll ich ihn da jemals von der Stelle bewegen?“ Wie kann der Bauer das Argument des Pferdes entkräften?

   Lösung: Actio und Reactio greifen an unterschiedlichen Körpern an. Die Kraft des Pferdes F_{actio} greift am Karren an, die Reaktionskraft des Karrens $F_{reactio}$ greift am Pferd an. Am Pferd greift jedoch noch eine weitere Kraft an, die Reaktionskraft der Erde auf seine Hufe. Bei jedem Schritt übt das Pferd eine Kraft auf die Erde aus und die Erde damit eine gleichgroße entgegengesetzte Kraft auf das Pferd. Das Pferd kann darum durch das ausüben einer entsprechend größeren Kraft auf die Erde die durch den Karren auf es ausgeübte Kraft kompensieren.

5. Erklären Sie den Unterschied zwischen kinetischer und potenzieller Energie.

   Lösung: Kinetische Energie ist die in Bewegung umgesetzte Energie. Potenzielle Energie ist die Energie die relativ zu einem bestimmten Bezugspunkt in Bewegung umgesetzt werden kann. Sie ist damit keine feste Größe sondern hängt vom Bezugspunkt ab.

Rechenaufgaben

1. Für einen kurzen Zeitraum kann der menschliche Körper eine Belastung mit 20g (das 20-fache der Erdbeschleunigung) unbeschadet aushalten. In einem Crash-Test wird ein Auto gegen eine Wand gefahren. Der Wagen hat eine Masse von 1320kg.

   a) Das Auto fährt mit 60km/h. Bestimmen sie, wie lang die sogenannte Knautschzone (Weg, den das Auto zurücklegt bevor es zum Stillstand kommt) sein muss, damit die maximale g-Belastung nicht überschritten wird.

   b) Nun fährt das Auto mit 130km/h gegen eine Wand. Wie groß müsste die Knautschzone nun sein?

c) Die meisten Autos besitzen eine Knautschzone von etwa 50cm. Ab welcher Geschwindigkeit ist bei solchen Autos bei einem Frontalcrash somit mit Verletzungen zu rechnen? Welcher Beschleunigung ist ein Insasse ausgesetzt, wenn ein solches Auto mit 150km/h gegen eine Wand fährt?

Lösung:

a) $60\frac{km}{h} \approx 16{,}67\frac{m}{s}$und $20g = 196{,}2\frac{m}{s^2}$. Aus $v = \sqrt{2as}$folgt $s = \frac{v^2}{2a}$. Man erhält nach Einsetzen der gegebenen Werte $s \approx 0{,}7m$. Die Knautschzone müsste somit etwa 70cm groß sein.

b) $130\frac{km}{h} \approx 36{,}11\frac{m}{s}$. Der Lösungsweg ist analog zu a. Man erhält$s \approx 3{,}3m$.

c) Man nutzt die Formel $v = \sqrt{2as}$und erhält $v \approx 14{,}0\frac{m}{s} \approx 50{,}4\frac{km}{h}$. Ab etwa 50km/h ist bei normalen Autos bei einem Frontalcrash also mit ernsthaften Verletzungen der Insassen zu rechnen.

Nun stellt man um zu $a = \frac{v^2}{2s}$. Für $150\frac{km}{h} \approx 41{,}67\frac{m}{s}$erhält man damit eine Beschleunigung von $a \approx 1736{,}1\frac{m}{s^2} \approx 176{,}97g$.

1. Berechnen Sie die Impulse und kinetischen Energien von folgenden Gegenständen:

a) Ein Hammer von 50g Masse und 12km/h Geschwindigkeit.

b) Eine Rakete, welche für 5s mit 5g beschleunigt wurde und eine Masse von 20t hat.

c) Ein Stift von der Masse 10g, welcher aus 1m Höhe zu Boden fällt unmittelbar vor dem Auftreffen.

Lösung:

a) $50g = 0{,}05kg$und $12\frac{km}{h} \approx 3{,}33\frac{m}{s}$. Demnach gilt $p = 0{,}05kg \cdot 3{,}33\frac{m}{s} \approx 0{,}17\frac{kgm}{s}$ und $E = \frac{1}{2} \cdot 0{,}05kg \cdot \left(3{,}33\frac{m}{s}\right)^2 \approx 0{,}28J$

b) $20t = 20000kg$und $5g = 49{,}05\frac{m}{s^2}$. Aus der Zeit und Beschleunigung lässt sich mittels $v = at$die Geschwindigkeit ermitteln. Man erhält $v = 245{,}25\frac{m}{s}$ und somit $p = 20000kg \cdot 245{,}25\frac{m}{s} = 4905000\frac{kgm}{s}$und $E = \frac{1}{2} \cdot 20000kg \cdot \left(245{,}25\frac{m}{s}\right)^2 = 601475625J$

c) $10g = 0{,}01kg$. Aus der angegebenen Fallhöhe lässt sich die Geschwindigkeit bestimmen: $v = \sqrt{2gh} \rightarrow v \approx 4{,}43\frac{m}{s}$. Daraus ergibt sich $p = 0{,}01kg \cdot 4{,}43\frac{m}{s} \approx 0{,}04\frac{kgm}{s}$und $E = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01kg \cdot \left(4{,}43\frac{m}{s}\right)^2 \approx 0{,}1J$.

1. Die Schubdüsen einer Rakete üben eine Kraft von 4088kN in Richtung $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$aus. Zusätzlich besitzt die Rakete 16 Steuerdüsen, die ringförmig um sie herum angeordnet sind. Jede Steuerdüse kann eine Kraft von 405kN ausüben. Die Rakete hat eine Masse von 313t.

a) Für eine Kurskorrektur werden zunächst zwei Steuerdüsen gezündet, die ihre Kraft in Richtung $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$und $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ausüben. Welche Kraft wirkt nun auf die Rakete?

b) Die Kraft der zwei Steuerdüsen reicht nicht aus, um die Korrektur schnell genug durchzuführen, darum wird eine dritte Düse zugeschaltet. Ihre Kraft wirkt in $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$-Richtung. Wie groß ist die Gesamtkraft, die nun auf die Rakete wirkt?

c) Welcher Beschleunigung ist die Rakete in Szenario a und b ausgesetzt?

Tipp: Rechnen Sie die gegebenen Vektoren in Einheitsvektoren um.

Lösung:

a) Die Kraftvektoren der Schubdüse und der ersten Steuerdüse sind bereits Einheitsvektoren. Der Einheitskraftvektor der zweiten Steuerdüse ist $\begin{pmatrix}0\\\sqrt{0{,}8}\\\sqrt{0{,}2}\end{pmatrix}$. Aus der Addition der Kraftvektoren ergibt sich $\begin{pmatrix}4088\\0\\0\end{pmatrix}kN + \begin{pmatrix}0\\405\\0\end{pmatrix}kN + \begin{pmatrix}0\\\sqrt{0{,}8}405\\\sqrt{0{,}2}405\end{pmatrix}kN =$
$\begin{pmatrix}4088\\(1+\sqrt{0{,}8})405\\\sqrt{0{,}2}405\end{pmatrix}kN \approx \begin{pmatrix}4088\\767{,}24\\181{,}12\end{pmatrix}kN$

b) Der Einheitsvektor des gegebenen Kraftvektors beträgt $\begin{pmatrix}0\\\sqrt{0{,}5}\\\sqrt{0{,}5}\end{pmatrix}$. Aus der Addition mit dem obigen Kraftvektor ergibt sich $\begin{pmatrix}4088\\\left(1+\sqrt{0{,}8}+\sqrt{0{,}5}\right)405\\\left(\sqrt{0{,}2}+\sqrt{0{,}5}\right)405\end{pmatrix}kN \approx \begin{pmatrix}4088\\1053{,}62\\467{,}50\end{pmatrix}kN$

c) Für die Kraft gilt $\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$. Man erhält somit für Szenario a
$\frac{1}{313t}\begin{pmatrix}4088\\(1+\sqrt{0{,}8})405\\\sqrt{0{,}2}405\end{pmatrix}kN \approx \begin{pmatrix}13{,}06\\2{,}44\\0{,}57\end{pmatrix}\frac{m}{s^2}$und für Szenario b
$\frac{1}{313t}\begin{pmatrix}4088\\\left(1+\sqrt{0{,}8}+\sqrt{0{,}5}\right)405\\\left(\sqrt{0{,}2}+\sqrt{0{,}5}\right)405\end{pmatrix}kN \approx \begin{pmatrix}13{,}06\\3{,}36\\1{,}49\end{pmatrix}\frac{m}{s^2}$

2. Ein PKW rast mit 100km/h auf einen stehenden Wagen. Die Masse des stehenden Wagens beträgt 1050kg, die des fahrenden Wagens 1760kg.

   a) Welche Geschwindigkeit hat der Verbund der beiden Wagen nach dem Zusammenprall?

   b) An den fahrenden Wagen ist nun ein Anhänger mit 640kg Masse angehängt. Welche Geschwindigkeit hat der Verbund nun nach dem Aufprall?

c) Nun fährt der zuvor stehende Wagen beim Aufprall mit einer Geschwindigkeit von 80km/h vor dem zweiten Wagen (ohne Anhänger). Welche Geschwindigkeit hat das Gespann nun nach dem Aufprall?

d) Welche Beschleunigungen wirken in Szenario a, b und c auf die Insassen der Wagen? Der menschliche Körper kann für kurze Zeit eine Beschleunigung von 20g (20-fache Erdbeschleunigung) unbeschadet überstehen. Sind die Insassen damit verletzt? Nehmen Sie an, dass die Beschleunigung über einen Zeitraum von 0,04s erfolgt.

Lösung:

a) Der Impuls des fahrenden Wagens beträgt $1760kg \cdot \left(\frac{100}{3{,}6}\right)\frac{m}{s} = 48888{,}89\frac{kgm}{s}$. Da Impulserhaltung gilt muss der der Verbund beider Wagen nachher denselben Impuls tragen: $p = (m_1 + m_2) \cdot v \Leftrightarrow v = \frac{p}{m_1+m_2}$Die Geschwindigkeit beträgt darum $v = \frac{48888{,}89\frac{kgm}{s}}{1760kg+1050kg} \approx 17{,}40\frac{m}{s} = 62{,}64\frac{km}{h}$

b) Rechnung ist analog zu a, es muss lediglich $m_1$durch $m_1 + m_{Anhänger}$ersetzt werden. Man erhält $v \approx 19{,}32\frac{m}{s} = 69{,}57\frac{km}{h}$

c) Nun muss für beide Wagen der Impuls berechnet werden. Für den bereits in a und b fahrenden Wagen ist es derselbe wie in a. Für den zweiten Wagen erhält man $p_2 = 1050kg \cdot \left(\frac{80}{3{,}6}\right)\frac{m}{s} \approx 23333{,}33\frac{kgm}{s}$. Es gilt $p_{nach} = p_1 + p_2$und somit $p_{nach} = 72222{,}22\frac{kgm}{s}$. Hieraus schließt man $v = \frac{72222{,}22\frac{kgm}{s}}{1050kg+1760kg} \approx 25{,}70\frac{m}{s} = 92{,}52\frac{km}{h}$.

d) Die Beschleunigungen der Wagen müssen einzeln betrachtet werden.

Zu a: Der stehende Wagen wird auf 62,64km/h beschleunigt. Die Insassen werden damit einer Beschleunigung von $a = \frac{v}{t} = \frac{17{,}40\frac{m}{s}}{0{,}04s} = 435\frac{m}{s^2} \approx 44{,}34g$ausgesetzt. Sie würden sich also verletzen. Der fahrende Wagen wird um 37,36km/h abgebremst. Die Insassen sind hier einer Beschleunigung von $a = \frac{-10{,}38\frac{m}{s}}{0{,}04s} \approx -259{,}44\frac{m}{s^2} \approx -26{,}45g$ausgesetzt. Auch sie würden sich somit verletzten.

Zu b: Der stehende Wagen wird auf 69,57km/h beschleunigt. Die Beschleunigung beträgt also $a = \frac{19{,}32\frac{m}{s}}{0{,}04s} = 483\frac{m}{s^2} \approx 49{,}24g$, so dass die Insassen sich verletzten würden. Der fahrende Wagen wird um 30,43km/h abgebremst und erfährt somit eine Beschleunigung von $a = \frac{-8{,}45\frac{m}{s}}{0{,}04s} \approx -211{,}32\frac{m}{s^2} \approx -21{,}54g$. Die Insassen würden somit also ebenfalls verletzt, jedoch vergleichsweise leicht.

Zu c: Der langsamer fahrende Wagen wird um 12,52km/h beschleunigt. Die Beschleunigung beträgt damit $a = \frac{3{,}48\frac{m}{s}}{0{,}04s} = 87\frac{m}{s} \approx 8{,}87g$und die Insassen wären folglich unverletzt. Der schneller fahrende Wagen wird um 7,48km/h abgebremst:

$a = \frac{-2{,}08\frac{m}{s}}{0{,}04s} = -52\frac{m}{s^2} \approx -5{,}3g$. Auch die Insassen in diesem Wagen wären also unverletzt.

3. An einer Staumauer fallen täglich $2{,}48 \cdot 10^{11}$l Wasser aus 123m Höhe hinab. Bestimmen Sie die darin enthaltene Leistung. Nehmen Sie hierfür eine Dichte von 1g/cm^3 für Wasser an.

   Lösung: 1kg Wasser hat in 123m Höhe eine potentielle Energie von $E_{pot} = 1kg \cdot 123m \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 1206{,}63J$. Diese Energie wird beim Sturz vollständig abgebaut. Bei einer Durchflussrate von $2{,}48 \cdot 10^{11}\frac{l}{d} = 2870370{,}37\frac{l}{s}$ergibt sich eine Leistung von $1206{,}63J \cdot 2870370{,}37\frac{1}{s} = 3463475000W = 3{,}463475MW$